Sur les surfaces de Kummer elliptiques.

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. On sait depuis longtemps que les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer par des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres u et v;* la même propriété appartient naturellement à la transformée homographique de cette surface, transformée que M. Cayley a nommée "*tétraédroïde.*"

Le tétraédroïde étant un cas particulier de la surface de Kummer à seize points doubles, la question se pose de rechercher si d'autres surfaces de Kummer possèdent la même propriété et de les déterminer toutes.

La recherche et l'étude de ces *Surfaces de Kummer elliptiques* forment l'objet du présent mémoire; il existe une liaison intime entre cette théorie et celle des courbes de genre deux dont une intégrale abélienne se reduit à une integrale elliptique.

I.—*Détermination des surfaces de Kummer elliptiques.*

2. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer générale peuvent s'exprimer, en fonction abélienne de deux paramètres, u et v, de la manière suivante. Soient $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$; a, b; b, c quatre paires de périodes: on suppose que la quantité $b^2 - ac$, lorsqu'on y remplace a, b, c par leurs parties réelles, est négative; admettons de plus, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est également négative. Les coordonnées homogènes, x_h, d'un point d'une surface de Kummer seront (à un même facteur de proportionnalité près) des fonctions uniformes et entières de u et v satisfaisant aux relations:

$$\left.\begin{aligned} x_h(u + 2\pi i, v) &= x_h(u, v + 2\pi i) = x_h(u, v), \\ x_h(u + a, v + b) &= x_h(u, v)\, e^{-2u-a}, \\ x_h(u + b, v + c) &= x_h(u, v)\, e^{-2v-c}. \end{aligned} \qquad (h = 1, 2, 3, 4) \right\} \qquad (1)$$

* Weber, Journal de Crelle, tome 94, p. 353.

Réciproquement, quatre fonctions uniformes et entières de u, v, linéairement distinctes, satisfaisant aux relations (1), sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace qui décrit une surface de Kummer lorsque u et v varient.*

Pour que les quotients des fonctions $x_h(u, v)$ deux à deux soient réductibles à des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux variables, il faut et il suffit que, par une transformation du premier ordre, on puisse ramener le tableau des périodes primitives au tableau suivant:

$$\begin{matrix} 2\pi i & 0 & \omega & \dfrac{2\pi i}{n} \\ 0 & 2\pi i & \dfrac{2\pi i}{n} & \omega' \end{matrix}$$

n désignant un nombre entier positif: cette proposition a été démontrée sous une autre forme par M. Picard, dans son mémoire sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques pour les courbes de genre deux;† elle résulte également du théorême plus général de M. Poincaré sur la réduction des intégrales abéliennes à des intégrales de genre moindre.‡

Sans insister sur ce point, nous voyons que, pour une *surface de Kummer elliptique*, les coordonnées homogènes d'un point seront des fonctions de u, v satisfaisant aux équations (1), dans lesquelles on suppose $b = \dfrac{2\pi i}{n}$, c. à d.:

$$\left.\begin{aligned} x_h(u + 2\pi i, v) &= x_h(u, v + 2\pi i) = x_h(u, v), \\ x_h\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= x_h(u, v)\, e^{-2u-a}, \\ x_h\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) &= x_h(u, v)\, e^{-2v-c} \end{aligned}\quad (h = 1, 2, 3, 4)\right\} \quad (2)$$

et réciproquement.

Nous avons d'ailleurs fait voir, dans notre mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, que les fonctions uniformes entières qui satisfont à des relations de la forme (1) [ou (2)] sont fonctions linéaires et homogènes de *quatre* d'entre elles, et qu'elles sont toutes *paires*, c. à d. ne changent pas si l'on y change simultanément u et v en $-u$, $-v$.§ En d'autres termes, puisqu'il y a quatre coordon-

* Voir à ce sujet: Weber, Journal de Crelle, tome 84; G. Humbert, Journal de Mathém., 4e série, tome IX, p. 47.

† Picard, Bulletin de la Société Mathém., tome XI, p. 43.

‡ Poincaré, American Journal, tome VIII, p. 289 et suiv.

§ Journal de Math., tome IX (4e série), p. 36.

nées homogènes, $x_h(u, v)$, les surfaces de Kummer elliptiques qui correspondent à des valeurs données de l'entier n et des périodes a, c, sont les transformées homographiques les unes des autres, et il suffit d'en étudier une pour avoir les propriétés projectives des autres.

Nous verrons, dans ces recherches, que le nombre n joue un rôle prépondérant, et nous lui donnerons le nom d'*indice* de la surface.

3. Cela posé, cherchons à exprimer, à l'aide des fonctions thêta elliptiques, les fonctions $x_h(u, v)$ qui vérifient les relations (2); il suffira, pour cela, de former a priori *quatre* de ces fonctions, linéairement distinctes.

Or considérons la fonction $\Theta_1(u)$, de Jacobi, formée avec les périodes $2\pi i$ et $\frac{a}{2}$; désignons-la, pour la symétrie des notations ultérieures, par $\vartheta_0(u)$, on aura par définition:

$$\vartheta_0(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{m^2 \frac{a}{4} + mu}.$$

Posons

$$\vartheta_h(u) = \vartheta_0\left(u + \frac{h\pi i}{n}\right); \qquad (h = 0, 1, \ldots. 2n - 1)$$

les $2n$ fonctions $\vartheta_h(u)$ vérifient les relations

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_h(u + 2\pi i) &= \vartheta_h(u), \\ \vartheta_h\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \vartheta_{h+2}(u), \\ \vartheta_h(u + a) &= \vartheta_h(u)\, e^{-2u - a} e^{-2h\frac{\pi i}{n}}, \\ \vartheta_h(u + na) &= \vartheta_h(u)\, e^{-2nu - n^2 a}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Soit posé de même

$$\theta_0(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 \frac{c}{4} + mv},$$

$$\theta_h(v) = \theta_0\left(v + \frac{h\pi i}{n}\right); \qquad (h = 0, 1, \ldots. 2n - 1)$$

les $2n$ fonctions $\theta_h(v)$ satisfont à des relations semblables aux relations (3), où a est remplacé par c.*

---

* Les séries $\vartheta_0(u)$ et $\theta_0(v)$ convergent, car on a admis que la partie réelle de a est négative et il en est de même de la partie réelle de c, d'après l'hypothèse faite sur $b^2 - ac$.

Désignons maintenant par ε et η deux nombres donnés, égaux à 0 ou à 1, et considérons la fonction $F_{\varepsilon,\eta}(u, v)$ définie par l'équation

$$F_{\varepsilon,\eta}(u, v) = \Sigma \vartheta_{2r+\varepsilon}(u)\, \theta_{2\rho+\eta}(v)\, e^{-(2r+\varepsilon)(2\rho+\eta)\frac{\pi i}{n}}. \tag{4}$$

Dans le second membre, la sommation est double et porte sur toutes les valeurs entières et positives de r et ρ, pour lesquelles $2r + \varepsilon$ et $2\rho + \eta$ restent tous deux inférieurs à $2n$, c. à d. sur toutes les valeurs de r et ρ comprises entre 0 et $n - 1$ inclus.

En donnant à ε et η toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles on obtient ainsi *quatre* fonctions $F_{\varepsilon,\eta}$, à savoir F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, et nous allons établir qu'elles vérifient les relations (2).

Ecrivons en effet en supprimant les indices ε et η:

$$F(u, v) = \Sigma\Sigma \vartheta_p(u)\, \theta_q(v)\, e^{-pq\frac{\pi i}{n}},$$

p et q étant des entiers, respectivement de parité donnée et variant entre 0 et $2n - 1$, les deux limites pouvant être atteintes. On a évidemment

$$F(u + 2\pi i, v) = F(u, v + 2\pi i) = F(u, v).$$

Changeons maintenant u en $u + \dfrac{2\pi i}{n}$ et v en $v + c$; on aura, d'après (3):

$$\vartheta_p\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) \theta_q(v + c)\, e^{-pq\frac{\pi i}{n}} = \vartheta_{p+2}(u)\, \theta_q(v)\, e^{-2v-c} e^{-(p+2)q\frac{\pi i}{n}}$$

et par suite, puisque $p + 2$ est de même parité que p:

$$F\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) = F(u, v)\, e^{-2v-c}.$$

De même

$$F\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) = F(u, v)\, e^{-2u-a};$$

$F(u, v)$ vérifie donc bien les relations (2).

Or il est bien connu (et d'ailleurs évident) que les fonctions $\vartheta_h(u)$, et de même les fonctions $\theta_h(v)$, sont linéairement distinctes; il en résulte immédiatement que les quatre fonctions $F(u, v)$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène, et dès lors la fonction entière la plus générale qui vérifie les relations (2) est une combinaison linéaire de nos fonctions $F_{\varepsilon,\eta}(u, v)$.

4. En résumé, *la surface de Kummer elliptique la plus générale, d'indice n, sera une transformée homographique de la surface définie, en coordonnées homogènes, par les équations*

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= F_{0,0}(u, v) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \vartheta_{2r}(u)\, \theta_{2\rho}(v)\, e^{-4r\rho \frac{\pi i}{n}}, \\
x_2 &= F_{0,1}(u, v) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \vartheta_{2r}(u)\, \theta_{2\rho+1}(v)\, e^{-2r(2\rho+1) \frac{\pi i}{n}}, \\
x_3 &= F_{1,0}(u, v) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \vartheta_{2r+1}(u)\, \theta_{2\rho}(v)\, e^{-2\rho(2r+1) \frac{\pi i}{n}}, \\
x_4 &= F_{1,1}(u, v) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=n-1} \vartheta_{2r+1}(u)\, \theta_{2\rho+1}(v)\, e^{-(2r+1)(2\rho+1) \frac{\pi i}{n}}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

les fonctions $\vartheta_h(u)$, $\theta_h(v)$ étant celles définies plus haut. Les quotients des x_h deux à deux ne changent pas quand on augmente u et v de périodes simultanées.

5. *Remarque:* On peut vérifier que les fonctions $F_{\epsilon,\eta}(u, v)$ sont *paires*; la fonction $\vartheta_0(u)$ étant en effet une fonction paire de u, on aura

$$\vartheta_h(-u) = \vartheta_0\left(u + \frac{h\pi i}{n}\right) = \vartheta_0\left(u - \frac{h\pi i}{n}\right) = \vartheta_{2n-h}(u)$$

et de même

$$\theta_h(-v) = \theta_{2n-h}(v).$$

Changer u et v en $-u$, $-v$ dans la fonction $F(u, v)$ écrite au n° 3, revient donc à changer p et q en $2n - p$, $2n - q$, ce qui n'altère pas la parité respective de ces deux nombres; de plus on a évidemment

$$e^{-pq \frac{\pi i}{n}} = e^{-(2n-p)(2n-q) \frac{\pi i}{n}}$$

et par suite $F(u, v)$ ne change pas.

On déduit de là que la surface définie par (5) est bien une surface d'ordre quatre. En effet, d'après un important théorème de M. Poincaré,* deux fonctions entières satisfaisant aux relations (1) ont huit zéros communs, et ces zéros, d'après ce qui précède, sont deux à deux égaux et de signes contraires, de la

* Bulletin de la Société Mathém., tome XI, p. 129.

forme (u, v) et $(-u, -v)$. En d'autres termes la surface (5) est coupée par une droite quelconque de l'espace en $\frac{1}{2}\,8$, c. à d. *quatre* points.

Si l'indice n était égal à l'unité, cette conclusion serait en défaut : dans ce cas en effet, il est facile de voir que les fonctions $F_{\epsilon,\eta}(u, v)$ sont paires *séparément* par rapport à u et par rapport à v ; à un point de la surface (5) correspondent alors les quatre couples d'arguments (u, v) ; $(-u, v)$; $(u, -v)$; $(-u, -v)$; cette surface est donc d'ordre $\frac{1}{4}.8$, c. à d. d'ordre deux, comme on le vérifierait d'ailleurs en formant les fonctions F.

II.—*Etudes des surfaces de Kummer elliptiques ; généralités.*

6. Les propriétés géométriques des surfaces de Kummer elliptiques sont liées à celles de deux séries de courbes remarquables qu'on peut tracer sur elles ; cette étude nous permettra d'obtenir, sous forme géométrique, la relation qui doit exister entre les points doubles d'une surface de Kummer, pour que la surface soit elliptique.

7. Si, dans les équations (5) qui définissent la surface, on donne à v une valeur constante, v_0, la courbe que décrit sur la surface le point $(x_1, \ldots . x_4)$ est une courbe *algébrique, de genre un,* puisque les coordonnées homogènes du point mobile sont des fonctions d'une variable u, dont les quotients deux à deux sont doublement périodiques, aux périodes $2\pi i$ et na, en vertu des relations (3).

Cette courbe est *d'ordre* $2n$, car les coordonnées $x_h(u)$ satisfaisant aux relations

$$\left.\begin{aligned} x_h(u+2\pi i) &= x_h(u), \\ x_h(u+na) &= x_h(u)\,e^{-2nu-n^2a} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

sont ce qu'on appelle des fonctions thêta d'ordre $2n$, et ont $2n$ zéros dans le parallélogramme des périodes $(2\pi i, na)$: en d'autres termes la courbe est coupée par un plan en $2n$ points et son degré est $2n$.

Il est à observer que la courbe $v = v_0$ est la même que la courbe $v = -v_0$, puisqu'à un point de la surface de Kummer correspondent les couples d'arguments u, v et $(-u, -v)$; de même la courbe $v = v_0$ coïncide avec la courbe

$$v = \pm v_0 + 2h\pi i + 2k\frac{\pi i}{n} + lc, \qquad (7)$$

h, k, l étant entiers, puisque les valeurs de v qui correspondent à un même point de la surface sont évidemment de la forme (7).

On obtient un second système de courbes d'ordre $2n$ et de genre un en donnant à u, dans les équations (5), une valeur constante. Il est clair que deux courbes d'un même système, $u = u_0$ et $u = u_1$, n'ont aucun point commun, et qu'il ne passe qu'une courbe du système par un point de la surface de Kummer.

Ces deux systèmes de courbes sont évidemment spéciaux aux surfaces de Kummer elliptiques; il est clair de plus, en vertu de la représentation paramétrique (5), que toutes les courbes $u = u_0$ ont le même module, et il en est de même des courbes $v = v_0$, entre elles.

8. *Une courbe* $u = u_0$ *et une courbe* $v = v_0$, *de l'autre système, sont sur une même surface d'ordre* n, dont elles constituent l'intersection complète avec la surface de Kummer.

Pour le démontrer analytiquement considérons la fonction entière $\phi(u)$ qui satisfait aux relations

$$\left.\begin{aligned} \phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \phi(u), \\ \phi(u + a) &= \phi(u)\, e^{-2nu - na} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

on trouve aisément, par la méthode des coefficients indéterminés, en reproduisant un calcul connu, qu'elle est de la forme

$$\phi(u) = \lambda_0 \phi_0(u) + \lambda_1 \phi_1(u)$$

les λ étant des constantes arbitraires, et étant posé

$$\phi_0(u) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{2n\mu u + n\mu^2 a},$$

$$\phi_1(u) = \sum e^{2n\left(\mu + \frac{1}{2}\right)u + n\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 a}.$$

D'ailleurs ϕ_0 et ϕ_1, et par suite ϕ, sont évidemment des fonctions paires de u. De plus $\phi(u)$, d'après (8), étant une fonction thêta d'ordre deux, a deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, dans le parallélogramme des périodes $\left(\frac{2\pi i}{n}, a\right)$.

Soit de même $\psi(v)$ la fonction entière la plus générale de v satisfaisant aux relations

$$\left.\begin{aligned} \psi\left(v + \frac{2\pi i}{n}\right) &= \psi(v), \\ \psi(v + c) &= \psi(v)\, e^{-2nv - nc} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

La fonction paire de u, v, $\phi(u)\psi(v)$, que nous désignerons par $F(u, v)$ vérifie les équations:

$$\left.\begin{aligned} F(u+2\pi i, v) &= F(u, v+2\pi i) = F(u, v), \\ F\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right) &= F(u, v)\, e^{-2nu-na}, \\ F\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right) &= F(u, v)\, e^{-2nv-nc}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Or nous avons fait voir *d'une manière générale** que sur une surface de Kummer dont les coordonnées d'un point sont des fonctions entières $x_h(u, v)$, vérifiant les équations (1), on obtient l'équation de la courbe complète commune à la surface et à une surface algébrique d'ordre n, en égalant à zéro une fonction entière, paire, de u, v, vérifiant les relations:

$$\left.\begin{aligned} \Theta(u+2\pi i, v) &= \Theta(u, v+2\pi i) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u+a, v+b) &= \Theta(u, v)\, e^{-2nu-na}, \\ \Theta(u+b, v+c) &= \Theta(u, v)\, e^{-2nv-nc}, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

et réciproquement, la courbe qu'on définit en égalant à zéro une telle fonction est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n.

D'après cela, la courbe, représentée sur la surface de Kummer elliptique que nous étudions, par l'équation $F(u, v) = 0$ est l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre n.

Or la courbe $F(u, v) = 0$ se décompose en deux courbes, $\phi(u) = 0$ et $\psi(v) = 0$. La fonction $\phi(u)$ ayant, comme nous l'avons vu, deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, la courbe $\phi(u) = 0$ sera une quelconque des courbes d'ordre $2n$, $u = u_0$; de même la courbe $\psi(v) = 0$ sera une quelconque des courbes $v = v_0$, et ces deux courbes sont, comme on vient de l'établir, sur une même surface d'ordre n.

9. On peût donner de ce théorème une autre démonstration, plus géométrique, et qui ne sera pas inutile pour la suite.

Cherchons d'abord en combien de points se coupent les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$. Les équations de ces deux courbes pouvant s'écrire (n° 7):

$$\left.\begin{aligned} u &= \pm u_0 + 2h\pi i + 2k\frac{\pi i}{n} + la, \\ v &= \pm v_0 + 2h'\pi i + 2k'\frac{\pi i}{n} + l'c, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

---

* Journal de Math., tome IX, p. 53 (4e série).

les arguments des points communs seront évidemment donnés par les deux équations précédentes, où h, k, ... l' sont des entiers quelconques. On peut d'abord faire $h = h' = 0$ sans changer le point (u, v); de plus a et $\frac{2\pi i}{n}$ formant une période simultanée de u, v, on peut, sans changer le point (12), augmenter à la fois u de $-k'a$ et v de $-2k'\frac{\pi i}{n}$; de même on peut augmenter u et v respectivement de $-2l'\frac{\pi i}{n}$ et de $-l'c$, et on a ainsi pour le point (12)

$$u = \pm u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa,$$
$$v = \pm v_0,$$

p et q étant deux entiers. Enfin le point ne changeant pas si on remplace u, v par $-u$, $-v$, on voit que tous les points cherchés sont compris dans les deux formules

$$\begin{cases} u = u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa, \\ v = v_0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = -u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa, \\ v = v_0. \end{cases}$$

Dans ces formules, p ne peut prendre que les valeurs $0, 1, \ldots (n-1)$, car si on augmente p de n unités, on augmente u de $2\pi i$, ce qui redonne le même point. De même on peut augmenter u et v simultanément de na et de $2\pi i$, puisque $\left(a, \frac{2\pi i}{n}\right)$ est une période simultanée; donc si on ajoute n unités à q, on retombe sur le même point, et par suite q peut prendre seulement les valeurs $0, 1, \ldots n-1$.

Donc enfin *les points communs aux deux courbes* $u = u_0$ *et* $v = v_0$ *sont au nombre* de n^2, donnés par la première formule, et de n^2, donnés par le seconde, soit un *total de* $2n^2$.

Cela posé, par $2n^2$ points *arbitraires* de la courbe *de genre un* et d'ordre $2n$, $u = u_0$, faisons passer une surface d'ordre n, S_n: cette surface contiendra la courbe tout entière, d'après les propriétés des courbes de genre un. Si on fait de plus passer S_n par un point de la courbe d'ordre $2n$, $v = v_0$, comme elle coupe déjà celle-ci en $2n^2$ points, situés sur la courbe $u = u_0$, elle aura en tout $2n^2 + 1$ points communs avec elle et la contiendra dès lors tout entière. Ainsi la condition, pour une surface d'ordre n, de passer par les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$, équivant à $2n^2 + 1$ conditions linéaires, et pour

démontrer que les deux courbes sont sur une surface d'ordre n, il suffira d'établir qu'on peut faire passer une telle surface par $2n^2+1$ points de notre surface de Kummer.

Or le nombre des points, d'une surface d'ordre 4, par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre n ne comprenant pas la surface primitive, est évidemment égal à

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)-1,$$

c. à d.

$$2n^2+1.$$

Le théorème est donc démontré. Réciproquement, il est aisé de voir que *toute* surface d'ordre n menée par une courbe $u=u_0$ coupe en outre la surface de Kummer suivant une courbe du système $v=v_0$.

10. Parmi les courbes $u=u_0$, il en est de particulièrement intéressantes; ce sont celles qui correspondent aux valeurs de u_0 égales à des demi-périodes de u.

Ces courbes ont pour équation :

$$u=h\pi i+k\frac{\pi i}{n}+l\frac{a}{2}\,; \qquad (h,k,l=0,1) \tag{13}$$

et paraissent être en nombre égal à 8, puisque h, k, l peuvent prendre chacun deux valeurs, mais nous verrons plus loin qu'elles se réduisent à quatre courbes distinctes.

Soit, pour abréger, $u=\frac{P}{2}$ l'équation de l'une d'elles, P étant une période de u; désignons par P' la période correspondante de v.

Soit X le quotient de deux coordonnées $x_h(u,v)$ d'un point de la surface de Kummer (5); on a (n° 5)

$$X(u,v)=X(-u,-v).$$

Pour $u=\frac{P}{2}$,

$$X\left(\frac{P}{2},v\right)=X\left(-\frac{P}{2},-v\right)=X\left(\frac{P}{2},-v+P'\right), \tag{14}$$

puisqu'on peut ajouter à u et v la période P, P', sans changer X. En d'autres termes, on voit qu'à un point de la courbe $u=\frac{P}{2}$, correspondent pour v deux

arguments, v et $P' - v$; par suite le degré de cette courbe sera la moitié du degré du cas général, c. à d. $\frac{1}{2} 2n$ ou n. Il en résulte également que la courbe $u = \frac{P}{2}$, *comptée deux fois*, jouira des propriétés générales des courbes $u = u_0$; par exemple, qu'il existera une surface d'ordre n circonscrite à la surface de Kummer le long de cette courbe, et passant par une courbe arbitraire $v = v_0$.

De plus la courbe $u = \frac{P}{2}$ est *unicursale*. En effet, les coordonnées non homogènes d'un de ses points sont des fonctions doublement périodiques de v qui ne changent pas quand on remplace v par $P' - v$, d'après (14); ce sont donc des fonctions doublement périodiques *paires* de la variable $V = v - \frac{P'}{2}$, et elles s'expriment en fonction rationnelle de $\wp V$, ce qui établit la proposition.

11. Démontrons maintenant que les courbes

$$u = h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2}$$

se réduisent à *quatre*.

On peut, sans changer la courbe, ajouter au second membre la quantité $2\mu\frac{\pi i}{n}$, μ étant entier (n° 7); on a ainsi

$$u = h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + 2\mu\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2}.$$

Si n est impair, on pourra toujours trouver un entier μ tel que $k + 2\mu$ soit un multiple, ρn, de n; et il vient, pour cette valeur de μ:

$$u = (h + \rho)\pi i + l\frac{a}{2}.$$

On a donc seulement quatre courbes:

$$u = 0; \quad u = \pi i; \quad u = \frac{a}{2}; \quad u = \pi i + \frac{a}{2}.$$

Si n est pair, on prendra $\mu = -\frac{n}{2}h$, et il viendra pour u:

$$u = k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2},$$

d'où quatre courbes seulement:

$$u = 0\,;\;\; u = \frac{\pi i}{n}\,;\;\; u = \frac{a}{2}\,;\;\; u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}\,.$$

12. De même, parmi les courbes $v = v_0$, figurent *quatre courbes unicursales d'ordre n*, dont les équations se déduisent des précédentes en changeant u en v et a en c.

III.—*Surfaces de Kummer elliptiques d'indice impair.*

13. Pour les recherches qui suivent, il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que l'indice n est impair ou pair; considérons d'abord le cas d'un indice impair,

$$n = 2d + 1.$$

Les seize points doubles de la surface de Kummer ont pour arguments, comme on sait, les seize demi-périodes simultanées; il en résulte que la courbe $u = u_0$ (ou $v = v_0$) qui passe par un point double est nécessairement une des quatre courbes unicursales du système correspondant. Il est intéressant d'étudier la répartition des points doubles sur ces courbes.

Soit par exemple la courbe $u = 0$; un point double de la surface de Kummer ayant pour arguments

$$\begin{cases} u = h\pi i + k\dfrac{\pi i}{n} + l\dfrac{a}{2}\,, \\ v = h'\pi i + k\dfrac{c}{2} + l\dfrac{\pi i}{n}\,, \end{cases} \qquad (h,\, h',\, k,\, l = 0,\, 1)$$

sera sur cette courbe si l'on a:

$$h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2} = 2k'\frac{\pi i}{n}\,,$$

car la courbe $u = 0$ est la même que la courbe $u = 2k'\dfrac{\pi i}{n}$. On en conclut

$$l = 0, \text{ et } nh + k = 2k',$$

ou, en remplaçant n par sa valeur, $2d + 1$:

$$2(dh - k') + h + k = 0,$$

équation qui donnera pour k' une valeur entière si $h + k$ est pair.

Ainsi les points doubles situés sur la courbe $u = 0$ seront les quatre points:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 0 \\ v = \pi i \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi i + \dfrac{\pi i}{n} \\ \dfrac{c}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi i + \dfrac{\pi i}{n} \\ \pi i + \dfrac{c}{2} \end{cases}.$$

On trouverait de même les arguments des quatre points doubles situés sur chacune des autres courbes d'ordre n, et on établit ainsi le tableau suivant.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$u = 0$	$0,\ 0$	$0,\ \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \pi i$	$\pi i,\ 0$	$\pi i,\ \pi i$	$\frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2},\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2},\ \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$
$u = \frac{a}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \pi i$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Un tableau analogue donne les points doubles par lesquels passent les quatre courbes unicursales d'ordre n, du système $v = v_0$.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$v = 0$	$0,\ 0$	$\pi i,\ 0$	$\frac{a}{2},\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \pi i$	$0,\ \pi i$	$\pi i,\ \pi i$	$\frac{a}{2},\ \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{2},\ \frac{c}{2}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2} + \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Ce nouveau tableau est le même que le premier, où l'on aurait remplacé les lignes par les colonnes.

14. De l'examen de ces deux tableaux résultant des conséquences simples.

Rappelons d'abord que les seize points doubles de la surface de Kummer sont situés six à six sur chacune des seize coniques de la surface, et qu'il est facile de faire le tableau de ces seize groupes de points exprimés à l'aide de leurs arguments.

Cela posé, voici les propositions qu'on peut énoncer, en se reportant d'ailleurs aux propriétés générales des surfaces de Kummer.

I.—Les quatre points doubles d'une surface de Kummer d'indice impair, n, situés sur une même courbe unicursale d'ordre n du système $u = u_0$ sont les sommets d'un tétraèdre de Rosenhain, c. à d. d'un tétraèdre dont les faces sont quatre plans singuliers.

Par *plan singulier*, on entend le plan d'une des seize coniques de la surface de Kummer.

II.—Les seize points doubles se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales du système $u = u_0$, en quatre tétraèdres de Rosenhain, qui n'ont deux à deux aucun sommet et aucune face communs.

III.—Des propositions pareilles s'appliquent aux quatre courbes unicursales du système $v = v_0$.

IV.—Un quelconque des quatre tétraèdres de Rosenhain du premier système et un quelconque des quatre tétraèdres du second ont un et un seul sommet commun la face opposée à ce sommet est la même dans les deux tétraèdres;

ou encore: Chaque courbe unicursale du système $u = u_0$ coupe chaque courbe unicursale du système $v = v_0$ en un point double de la surface de Kummer; les trois autres points doubles situés sur la première courbe et les trois autres points doubles situés sur la seconde sont sur une même conique de la surface de Kummer.

V.—D'après cela, on peut faire correspondre à un point double de la surface de Kummer le plan singulier qui est la face commune des deux tétraèdres de Rosenhain dont ce point est le sommet dans les deux systèmes: chaque point double et le plan singulier correspondant sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une des dix quadriques fondamentales; c. à d. à une des quadriques par rapport auxquelles la surface de Kummer est sa propre réciproque.

16. Les formules du n° 9 permettent de déterminer les points de la surface de Kummer où se rencontrent deux courbes unicursales d'ordre n de système différent. Considérons par exemple les courbes $u = 0$ et $v = 0$; d'après le n° 9, leurs points communs sont donnés par la formule *unique*,

$$\begin{cases} u = 2p\dfrac{\pi i}{n} + qa, \\ v = 0, \end{cases}$$

où p et q prennent les valeurs $0, 1, \ldots . n - 1$.

Il semble qu'on obtienne ainsi n^2 points, mais les deux points :

$$\begin{aligned} u &= 2p\frac{\pi i}{n} + qa, \\ v &= 0, \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u' &= 2(n-p)\frac{\pi i}{n} + (n-q)a, \\ v' &= 0, \end{aligned}$$

coïncident, car les sommes $(u + u')$ et $(v + v')$, c. à d. $2\pi i + na$ et 0 forment une période simultanée de u et v. D'ailleurs les nombres p et $n - p$, q et $n - q$ ne peuvent être simultanément égaux, puisque n est impair; par suite—à l'exception du point $u = 0$, $v = 0$—les points donnés par la formule précédente coïncident deux à deux, et leur nombre total est

$$1 + \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Ainsi : deux courbes unicursales d'ordre n, de système différent, se coupent en un point singulier de la surface de Kummer et ont en outre $\frac{n^2-1}{2}$ points communs.

17. Il en résulte sans difficulté, par un raisonnement semblable à celui du n° 9, que *l'on peut faire passer par les deux courbes unicursales une surface d'ordre* $\frac{n+1}{2}$, qui ne comprend pas la surface de Kummer, et qui par suite coupe encore cette dernière suivant une courbe d'ordre $2(n + 1) - 2n$, c. à d. suivant une *conique.* Cette conique est celle qui contient les points doubles situés sur les deux courbes considérées, en dehors de celui qui leur est commun (n° 14): pour le vérifier, observons en effet que la conique précédente est rencontrée par chacune des deux courbes d'ordre n en 3 points singuliers et en $\frac{n-3}{2}$ autres

points, car toute ligne tracée sur la surface de Kummer *touche* nécessairement un plan singulier en tous les points non singuliers où elle le rencontre. On voit ainsi que la conique considérée a, sur la surface d'ordre $\frac{n+1}{2}$, un nombre de points au moins égal à $2\left[3+\frac{n-3}{2}\right]$, c. à d. $n+3$, et par suite elle est tout entière sur la surface.

On aurait pu démontrer ce théorème analytiquement, en suivant une marche analogue à celle du n° 8.

18. Les résultats qui précèdent suffisent pour établir géométriquement les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir une surface de Kummer pour être une surface elliptique d'indice impair.

Ces conditions, en effet, lorsque l'indice est donné, se réduisent évidemment à une seule, qui, au point de vue analytique, constitue une relation entre les périodes a, b, c des fonctions hyperelliptiques liées à la surface. Or ces fonctions sont celles qu'on obtient en appliquant le problème de l'inversion de Jacobi aux intégrales abéliennes de première espèce et de genre deux qui appartiennent à une quelconque des sections de la surface par un plan tangent; par suite, au point de vue géométrique, la condition cherchée se traduira par une relation entre les trois *modules* d'une de ces sections. Si l'on observe maintenant que les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double sont les rapports anharmoniques des six tangentes (prises quatre à quatre), qu'on peut mener à la courbe par le point double, et que ces rapports sont égaux à ceux de six points singuliers de la surface de Kummer situés sur une même conique,* on voit que la question est ramenée au problème suivant:

Trouver, sur une surface de Kummer elliptique, d'indice donné, la relation projective qui lie les positions des six points doubles de cette surface situés sur une même conique.

En même temps nous aurons trouvé la condition qui doit lier les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double pour que cette courbe ait une (et par suite aussi une seconde) intégrale abélienne de première espèce réductible aux intégrales elliptiques.

---

* Voir par exemple Journal de Mathém., tome IX, p. 114 (4e série).

19. Pour rendre plus claire la méthode que nous allons employer, nous l'appliquerons tout d'abord au cas particulier de $n = 3$.

D'après la théorie générale, les courbes $u = u_0$ sont des courbes d'ordre six, c. à d. des *sextiques*, de genre un, parmi lesquelles figurent *quatre cubiques* gauches.

Soit C une quelconque des seize coniques de la surface de Kummer, par exemple celle qui passe par les six points doubles ayant pour arguments u, v:

$$0, \pi i; \ \pi i + \frac{\pi i}{3}, \frac{c}{2}; \ \pi i + \frac{\pi i}{3}, \frac{c}{2} + \pi i; \ \pi i, \ 0; \ \frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{3}; \frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{3},$$

que nous désignerons respectivement, suivant l'ordre ci-dessus, par

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_6.$$

Le plan de la conique C touche en trois points chacune des sextiques $u = u_0$, puisque ces sextiques sont tracées sur la surface de Kummer et que le plan considéré est tangent à la surface tout le long de la conique; les sextiques $u = u_0$ rencontrent donc chacune en *trois* points la conique C. Ces groupes de trois points, en nombre simplement infini, déterminent sur C une *involution*, puisque par un point de la surface de Kummer ne passe qu'une seule sextique. Un des groupes de l'involution est formé par les trois points α_1, α_2, α_3, qui sont sur la cubique $u = 0$; la cubique $u = \pi i$ passe par le point α_4 et rencontre la conique C en un autre point, m_4: le groupe de l'involution auquel appartient α_4 est formé de ce point et du point m_4 compté *deux fois*, puisque l'on obtient une sextique de la famille $u = u_0$ en comptant *deux fois* la cubique $u = \pi i$ (n° 10). De même les groupes de l'involution auxquels appartiennent les points α_5 et α_6 comprennent respectivement un point de la conique compté deux fois.

En résumé, il existe sur la conique C une involution de groupes de 3 points, en nombre simplement infini—involution qui dépend par suite de *quatre* paramètres—et qui jouit des propriétés suivantes.

1°. Les trois points singuliers α_1, α_2, α_3 forment un groupe de l'involution.

2°. Les deux points qui forment un groupe avec chacun des points singuliers α_4, α_5, α_6 sont confondus.

Ces conditions établissent, entre les *quatre* paramètres dont l'involution dépend, $2 + 3$ c. à d. *cinq* relations; elles impliquent donc *une* relation entre les positions des points $\alpha_1, \ldots . \alpha_6$ sur la conique C, et donnent ainsi la solution du problème que nous nous étions proposé.

20. On peut, dans le cas particulier actuel, donner à cette solution une forme élégante.

Sur la conique C les droites qui joignent deux points appartenant à un même groupe de l'involution enveloppent une conique C', puisque par un point de C ne passent que deux de ces droites. La conique C' touche, d'après les propriétés qui précèdent, les trois côtés du triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$; de plus les deux tangentes menées à C' par chacun des points α_4, α_5, α_6 coïncident, ce qui prouve que C' passe par ces trois points. Ainsi, il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et passant par les points α_4, α_5, α_6. Inversement, s'il existe une telle conique, C', nous savons, par les théorèmes de Poncelet, qu'il y aura une infinité simple de triangles inscrits à C et circonscrits à C', et les sommets de ces triangles détermineront sur C une involution qui jouira évidemment des propriétés indiquées au n° 19.

Donc enfin:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit elliptique et d'indice trois s'exprime ainsi, sous forme géométrique: les six points doubles situés sur une des coniques de la surface doivent se répartir en deux groupes de trois points chacun, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au triangle formé par les trois premiers points et circonscrite au triangle formé par les trois derniers.

21. *Remarque:* Au lieu des courbes $u = u_0$, on aurait pu considérer les courbes $v = v_0$. La cubique $v = 0$ passant par les points α_4, α_5, α_6, on aurait établi de même qu'il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$ et circonscrite au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, d'où l'on déduit ce théorème de géométrie élémentaire:

Etant donnés sur une conique deux groupes de trois points formant deux triangles, s'il existe une conique inscrite au premier triangle et circonscrite au second, il existera une autre conique inscrite au second triangle et circonscrite au premier.

Sous une autre forme:

Chaque point d'intersection du cercle circonscrit à un triangle avec un des cercles inscrit ou exinscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle.

22. Il est aisé de donner une forme analytique à la condition trouvée au n° 20.

Supposons en effet que les coordonnées homogènes d'un point de la conique C soient exprimées en fonction quadratique et entière d'un paramètre, t; on peut toujours admettre que les valeurs du paramètre qui correspondent aux trois points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont respectivement $0, 1, \infty$, et nous désignerons par λ^2, μ^2, ν^2 celles qui correspondent aux points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$. Nous aurons à exprimer, en désignant par λ', μ', ν' trois constantes, que les racines des trois polynômes du troisième ordre

$$(t-\lambda^2)(t-\lambda')^2,$$
$$(t-\mu^2)(t-\mu')^2,$$
$$(t-\nu^2)(t-\nu')^2,$$

sont trois groupes d'une involution simplement infinie, d'ordre trois, dont un des groupes est formée par les valeurs $0, 1, \infty$. En d'autres termes il suffira d'écrire que les différences des trois polynômes précédents, pris deux à deux, sont divisibles par $t(t-1)$, ce qui donne les relations:

$$\lambda^2\lambda'^2 = \mu^2\mu'^2 = \nu^2\nu'^2,$$
$$(1-\lambda^2)(1-\lambda')^2 = (1-\mu^2)(1-\mu')^2 = (1-\nu^2)(1-\nu')^2,$$

d'où:
$$\lambda\lambda' = \mu\mu' = \nu\nu' = \rho$$

et
$$\sqrt{1-\lambda^2}\left(1-\frac{\rho}{\lambda}\right) = \sqrt{1-\mu^2}\left(1-\frac{\rho}{\mu}\right) = \sqrt{1-\nu^2}\left(1-\frac{\rho}{\nu}\right). \quad (15)$$

L'élimination de ρ entre les équations (15) donne la condition cherchée, qui peut s'écrire:

$$(\lambda+\mu)^2(\lambda+\nu)^2(\mu+\nu)^2 = 4\lambda\mu\nu(1+\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu)(\lambda+\mu+\nu+\lambda\mu\nu). \quad (16)$$

On peut donner une autre forme à cette conclusion.

Le rapport anharmonique de quatre points situés sur une conique est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes du paramètre t; donc λ^2, μ^2 et ν^2 sont les rapports anharmoniques des trois groupes de points $\alpha_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\alpha_5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\alpha_6, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ces rapports anharmoniques sont aussi, d'après une propriété rappelée au n° 18, les modules de la courbe du quatrième ordre, de genre deux, qui est liée à la surface de Kummer considérée; on peut donc dire que cette courbe est représentable point par point sur la courbe de genre deux

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda^2)(x-\mu^2)(x-\nu^2) \quad (17)$$

qui a les mêmes modules.

Donc enfin la courbe (17) aura une intégrale abélienne de première espèce (et par suite une seconde) réductible aux intégrales elliptiques, avec l'indice 3, si la condition (16) est satisfaite.

23. Si, du cas où l'indice est égal à 3, nous passons à celui d'un indice impair quelconque, nous établissons, par les raisonnements du n° 19, les propositions suivantes.

Soient toujours $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_6$ les six points doubles de la surface de Kummer situés sur une même conique;* les courbes d'ordre $2n$, $u =$ const., déterminent sur cette conique une involution, formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et telle:

1° que les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartiennent à un même groupe et que les $n - 3$ autres points de ce groupe soient deux à deux confondus;

2° que les groupes auxquels appartiennent respectivement les points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ comprennent en outre $n - 1$ points deux à deux confondus.

Ces propriétés établissent une relation entre les positions des six points α. En effet, une involution simplement infinie, d'ordre n, dépend de $2n - 2$ paramètres; les conditions précédentes établissent entre ces paramètres

$$2 + \frac{n-3}{2} + 3\,\frac{n-1}{2},$$

c. à d. $2n - 1$ relations, et par suite il est nécessaire, pour que l'involution existe, que les points α soient liés par *une* relation, qui est précisément la condition cherchée.

Voici la marche qu'on pourrait suivre pour former analytiquement cette condition. Admettons, comme au n° précédent, que les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_6$ aient respectivement pour argument, sur leur conique, les quantités $0, 1, \infty, \lambda^2, \mu^2, \nu^2$, il faudra exprimer, en désignant par $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \rho_i$ des constantes, que les quatre polynômes

$$f_1(t) = (t - \lambda^2)(t - \lambda_1)^2 \ldots . (t - \lambda_{\frac{n-1}{2}})^2,$$
$$f_2(t) = (t - \mu^2)(t - \mu_1)^2 \ldots . (t - \mu_{\frac{n-1}{2}})^2,$$
$$f_3(t) = (t - \nu^2)(t - \nu_1)^2 \ldots . (t - \nu_{\frac{n-1}{2}})^2,$$
$$f_4(t) = t(t-1)(t - \rho_1)^2 \ldots . (t - \rho_{\frac{n-3}{2}})^2,$$

* Ces points sont, par exemple, dans l'ordre indiqué, ceux qui ont pour arguments:

$$0,\ \pi i;\ \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2};\ \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i;\ \pi i,\ 0;\ \frac{a}{2},\ \pi i + \frac{\pi i}{n};\ + \frac{a}{2} + \pi i,\ \pi i + \frac{\pi i}{n}.$$

sont en involution, c. à d. que deux d'entre eux sont fonctions linéaires et homogènes des deux autres.

Il est aisé de voir que ces conditions reviennent aux suivantes.

1°. On aura

$$\left.\begin{aligned} f_1(0) = f_2(0) = f_3(0), \\ f_1(1) = f_2(1) = f_3(1). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

2°. On exprimera qu'on a, quelque soit t:

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ \lambda^2 + 2\Sigma\lambda_i & \mu^2 + 2\Sigma\mu_i & \nu^2 + 2\Sigma\nu_i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3°. La différence $f_1(t) - f_2(t)$, débarrassée du facteur $t(t-1)$, sera un carré parfait.

On obtient ainsi, comme on le voit sans difficulté, entre les $3\frac{n-1}{2}$ coefficients λ_i, μ_i, ν_i, un nombre de relations égal à

$$4 + (n-3) + \frac{n-3}{2},$$

c. à d. $3\frac{n-1}{2} + 1$, et l'élimination des λ_i, μ_i, ν_i entre ces relations donnera l'équation algébrique cherchée entre λ^2, μ^2, ν^2.

24. On peut donner quelques propriétés de cette équation, que nous désignerons par $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$. Les quantités λ^2, μ^2, ν^2 sont en effet les rapports anharmoniques des points α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, de telle sorte qu'on ait, en désignant par α_i le paramètre unicursal qui correspond au point α_i:

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} : \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3},$$

avec des expressions semblables pour μ^2 et ν^2 en remplaçant α_4 par α_5 et α_6. Or la condition géométrique qu'exprime l'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ dépend uniquement d'une répartition des points α_i en deux groupes de trois et nullement de l'ordre des points dans chaque groupe. Cette équation ne change donc pas si l'on permute entre eux α_1, α_2, α_3 ou α_4, α_5, α_6. Permuter α_4 et α_5 revient à permuter λ^2 et μ^2; donc *l'équation* $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$ *est symétrique* par rapport à λ^2, μ^2, ν^2:

ce fait n'était nullement évident; nous verrons qu'il ne se reproduit pas dans le cas d'un indice pair.

Permuter α_1, α_2, α_3 revient à remplacer le rapport anharmonique λ^2 par une des cinq autres valeurs bien connues de ce rapport, c. à d. par

$$\frac{1}{\lambda^2}, \ 1-\lambda^2, \ \frac{1}{1-\lambda^2}, \ \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}, \ \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}.$$

Donc *l'équation* $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ *ne change pas si l'on y remplace simultanément* λ^2, μ^2, ν^2 *par* $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}, \frac{1}{\nu^2}$, *ou par* $1-\lambda^2$, $1-\mu^2$, $1-\nu^2$, et par toutes les valeurs qui dérivent de ces deux transformations appliquées successivement dans un ordre quelconque.

L'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ *se décompose en quatre équations distinctes en* λ, μ, ν: reprenons en effet les premières relations (18):

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0);$$

elles s'écrivent:

$$\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2 \ldots\ldots = \mu^2\mu_1^2\mu_2^2 \ldots\ldots = \nu^2\nu_1^2\nu_2^2 \ldots\ldots,$$

d'où:

$$\lambda\lambda_1\lambda_2 \ldots\ldots = \pm\, \mu\mu_1\mu_2 \ldots\ldots = \pm\, \nu\nu_1\nu_2 \ldots\ldots$$

Chaque groupement des signes + et — conduit à une équation finale en λ, μ, ν: on passe de l'une de ces équations aux trois autres en changeant séparément ou simultanément les signes de μ et de ν.

Enfin *chacune des quatre équations* ainsi obtenues *se décompose en quatre autres* si l'on prend pour variables, à la place de λ, μ, ν, les quantités:

$$L = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}; \ M = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}; \ N = \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}}.$$

Les secondes relations (18): $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1)$ s'écrivent en effet:

$$\begin{aligned}(1-\lambda^2)[(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots\ldots]^2 &= (1-\mu^2)[(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots\ldots]^2 \\ &= (1-\nu^2)[(1-\nu_1)(1-\nu_2)\ldots\ldots]^2\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}\frac{2L}{1+L^2}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots\ldots &= \pm\frac{2M}{1+M^2}(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots\ldots \\ &= \pm\frac{2N}{1+N^2}(1-\nu_1)(1-\nu_2)\ldots\ldots\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

25. *Remarque:* Si, plus généralement, on considère la courbe de genre deux

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots . (x - \alpha_6),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques, avec un indice impair, se décomposera, à cause du rôle géométrique particulier que jouent trois des points α_i, en autant d'équations distinctes qu'il y a de combinaisons trois à trois des six quantités α_i; toutefois, en vertu de la Remarque du n° 21 généralisée, à deux combinaisons telles que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ correspondra une seule et même équation. Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée se décompose en *dix* équations différentes, rationnelles par rapport aux quantités α_i, et chacune de ces équations se décompose en seize autres si l'on fait les changements de variables indiqués au n° précédent.

26. Le calcul permet aisément de vérifier et de compléter les résultats auxquels nous a conduit la géométrie. Soit en effet la courbe :

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots . (x - \alpha_6);$$

nous supposons qu'une involution d'ordre n, définie par l'équation

$$f(x) - \theta\phi(x) = 0, \tag{19}$$

où $f(x)$ et $\phi(x)$ sont des polynômes d'ordre (impair) n et où θ est un paramètre variable, possède les quatre groupes remarquables indiqués au n° 23; soient θ_0, θ_4, θ_5, θ_6 les valeurs du paramètre qui correspondent à ces groupes, on a identiquement, par hypothèse:

$$\left.\begin{aligned} f(x) - \theta_0\phi(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\psi_0^2(x), \\ f(x) - \theta_4\phi(x) &= (x - \alpha_4)\psi_4^2(x), \\ f(x) - \theta_5\phi(x) &= (x - \alpha_5)\psi_5^2(x), \\ f(x) - \theta_6\phi(x) &= (x - \alpha_6)\psi_6^2(x), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$\psi_0, \ldots . \psi_6$ étant des polynômes entiers en x, dont le premier est d'ordre $\frac{n-3}{2}$ et les trois autres d'ordre $\frac{n-1}{2}$.

Les points doubles de l'involution (19) sont donnés par les racines de l'équation, d'ordre $2n - 2$:

$$f'(x)\phi(x) - f(x)\phi'(x) = 0. \tag{21}$$

Les racines des équations $\psi_0 = 0$, $\psi_4 = 0$, $\psi_5 = 0$, $\psi_6 = 0$ sont évidemment des points doubles de l'involution ; leur nombre total étant $\frac{n-3}{2} + 3\frac{n-1}{2}$, c. à d. $2n - 3$, l'équation (21), en dehors de ces racines, n'aura qu'une seule racine nouvelle, ω, et il viendra identiquement :

$$f'(x)\,\phi(x) - f(x)\,\phi'(x) = h\psi_0\psi_4\psi_5\psi_6(x-\omega), \tag{22}$$

h étant une constante.

Cela posé, si dans la différentielle elliptique

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_4)(\theta-\theta_5)(\theta-\theta_6)}},$$

on remplace la variable θ par la variable x, liée à θ par la relation (19), caractéristique de l'involution :

$$f(x) - \theta\phi(x) = 0,$$

il vient :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_4)(\theta-\theta_5)(\theta-\theta_6)}} = \frac{dx\,(f'(x)\,\phi(x) - f(x)\,\phi'(x)}{\sqrt{[f(x)-\theta_0\phi(x)][f(x)\,\theta_4\phi(x)]\ldots[f(x)-\theta_6\phi(x)]}}$$

et, en vertu des identités (20) et (22), le second membre devient :

$$\frac{h(x-\omega)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}. \tag{23}$$

On voit donc bien que la différentielle hyperelliptique (23) est réductible à une différentielle elliptique par la substitution (19), lorsqu'on admet l'existence de l'involution définie géométriquement au n° 23.* On aurait pu d'ailleurs établir directement *par le calcul* que l'existence d'une telle involution est nécessaire pour qu'il existe une intégrale réductible.

IV.—*Surfaces de Kummer elliptiques d'indice pair.*

27. On étudie sans difficulté, comme au n° 13, la répartition des points doubles d'une surface de Kummer elliptique d'indice pair, n, sur les quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans la série $u =$ const., et l'on arrive au tableau suivant :

---

* Le degré de la substitution par rapport à x est égal à l'indice, n, comme l'a fait voir M. Picard.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$u=0$	$0, 0$	$0, \pi i$	$\pi i, 0$	$\pi i, \pi i$
$u=\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}+\pi i, \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}, \pi i+\frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}+\pi i, \pi i+\frac{\pi i}{n}$
$u=\frac{\pi i}{n}$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\pi i+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\pi i$	$\pi i+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\pi i$
$u=\frac{\pi i}{n}+\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}+\pi i+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\pi i+\frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}+\pi i+\frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2}+\pi i+\frac{\pi i}{n}$

Pour les courbes unicursales du système $v=v_0$, on a un tableau analogue qu'il est inutile d'écrire, car les courbes $v=0$, $v=\frac{c}{2}$, $v=\frac{\pi i}{n}$, $v=\frac{\pi i}{n}+\frac{c}{2}$ passent respectivement par les quatre mêmes points doubles que les courbes $u=0$, $u=\frac{\pi i}{n}$, $u=\frac{a}{2}$, $u=\frac{\pi i}{n}+\frac{a}{2}$.

De ces remarques résultent les conséquences suivantes.

I.—Sur une surface de Kummer elliptique d'indice pair, n, chacune des quatre courbes unicursales d'ordre n du système $u=u_0$ passe par quatre points doubles, qui sont également situés sur une des quatre courbes unicursales d'ordre n du système $v=v_0$. Ces quatre points doubles sont les sommets d'un tétraèdre de Göpel, c. à d. d'un tétraèdre dont aucune des faces n'est un plan-singulier de la surface.

Une courbe unicursale du système $u=u_0$ et la courbe unicursale du système $v=v_0$ qui passe par les quatre mêmes points doubles seront dites associées.

II.—Les seize points doubles de la surface de Kummer se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales d'un système, en quatre tétraèdres de Göpel qui n'ont deux à deux aucun sommet commun.

III.—Les six points doubles de la surface situés dans un quelconque des seize plans singuliers se partagent en trois couples, les deux points de chaque couple étant sur une même courbe unicursale du système $u=u_0$, et la quatrième courbe unicursale du système ne passe par aucun des six points doubles considérés.

28. On établit également, comme aux n° 16 et 17 que:

Chaque courbe unicursale d'ordre n d'un système coupe la courbe associée de l'autre système en quatre points doubles et en $\frac{n^2-4}{2}$ points simples de la surface; elle coupe les trois autres courbes unicursales du second système en $\frac{n^2}{2}$ points simples.

Deux courbes unicursales d'ordre n associées sont sur une surface d'ordre $\frac{n}{2}$, dont elles constituent toute l'intersection avec la surface de Kummer.

29. Soit, comme au n° 23, C une des coniques de la surface de Kummer et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_6$ les six points doubles situés sur cette courbe. Les courbes $u = u_0$ déterminent sur la conique une involution formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et aux quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans le système $u = u_0$ correspondent quatre groupes remarquables:

1° un groupe comprenant deux des six points singuliers, α_1 et α_2 par exemple, et outre $\frac{n-2}{2}$ points comptés chacun deux fois.

2° et 3° deux groupes analogues comprenant chacun deux points singuliers, par exemple α_3 et α_4, α_5 et α_6.

4° un groupe composé de $\frac{n}{2}$ points comptés chacun deux fois.

L'existence, sur la conique C, d'une involution jouissant de ces propriétés établit une relation entre les positions des six points α_i. En effet, une involution, simplement infinie, d'ordre n dépend de $2n-2$ paramètres et les quatre propriétés précédentes établissent entre ces paramètres $3\left[1+\frac{n-2}{2}\right]+\frac{n}{2}$, c. à d. $2n-1$ équations: il est donc nécessaire que les points α soient liés par une relation.

On est ainsi conduit à une méthode de calcul exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe

$$y^2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots . (x-\alpha_6),$$

ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques avec un indice pair.

Cette condition se décomposera en autant d'équations distinctes qu'il y a de manières de partager les six quantités $\alpha_1 \ldots . \alpha_6$ en trois groupes de deux, c. à d. en quinze équations.

Pour former l'équation qui correspond à un groupement donné, par exemple α_1 et α_2, α_3 et α_4, α_5 et α_6, on écrira, en désignant par P, Q, R des polynômes en x, d'ordre $\frac{n}{2} - 1$, où le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité :

1° qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les trois polynômes d'ordre n :

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,P^2,$$
$$(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\,Q^2,$$
$$(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)\,R^2,$$

ce qui donne, entre les coefficients de P, Q, R et les α, $n-1$ relations ;

2° qu'une combinaison linéaire des deux premiers polynômes d'ordre n est un carré parfait, ce qui donne $\frac{n}{2} - 1$ relations.

On a en tout $\frac{3n}{2} - 2$ relations, entre lesquelles on éliminera les $3\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ coefficients de P, Q, R pour avoir l'équation cherchée entre les α.

La méthode de calcul du n° 26 permettrait de vérifier ces résultats et donnerait l'intégrale réductible ; le degré de la substitution qui permet de réduire cette intégrale serait encore égal à n. Nous n'insistons pas sur tous ces points pour éviter des répétitions.*

30. Le cas particulier où n est égal à 2 correspond au *tétraédroïde* de M. Cayley. En ce cas en effet, d'après les résultats du n° 27, il y a, sur la surface huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans : dans chacun de ces plans les points communs à deux coniques sont des points doubles de la surface. Ces propriétés caractérisent le tétraédroïde.

Pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde, il faut, en vertu des raisonnements du n° 29, que les six points singuliers α_i, situés sur une des coniques ordinaires de la surface, soient liés à une involution formée de groupes de deux points de la conique de telle façon : 1° que trois groupes de l'involution

---

* On verrait comme au n° 26 que la substitution qui permet de réduire l'intégrale est identique à la relation qui définit l'involution sur la conique C.

soient formés respectivement par deux des points a_i; 2° qu'un des groupes de l'involution soit formé par un point compté deux fois. Cette dernière condition est remplie d'elle-même, puisqu'une involution de groupes de deux points a toujours deux points doubles. Donc enfin la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde est que les six points doubles de la surface, situées sur une des seize coniques, forment trois couples en involution, on encore soient les sommets d'un hexagone de Brianchon. C'est la condition trouvée par M. Klein (Math. Annalen, tome II).

31. Les conditions générales du n° 29 appliquées au cas particulier de $n = 4$ conduisent aisément à la proposition suivante.

Soit C une conique; dans son plan on considère un système quelconque de coniques bitangentes entre elles en deux mêmes points; parmi ces coniques quatre touchent la conique C en des points q_1, q_2, q_3, q_4 et la coupent en outre chacune en deux autres points, p_1 et p_1', ... p_4 et p_4'. Si on choisit arbitrairement trois des quatre couples p_i et p_i' on obtient, sur la conique C, six points qui forment la configuration la plus générale des six points doubles d'une surface de Kummer elliptique d'indice quatre, situés sur une même conique de cette surface.

Analytiquement, si l'on désigne par p_i et q_i les arguments rationnels des points p_i et q_i sur la conique C, on peut dire que l'intégrale

$$\int \frac{(x - q_1)\,dx}{\sqrt{(x - p_2)(x - p_2')(x - p_3)(x - p_3')(x - p_4)(x - p_4')}}$$

est réductible aux intégrales elliptiques, par une transformation d'ordre quatre, ainsi que les intégrales qu'on obtient en permutant dans l'intégrale précédente les indices 1, 2, 3 et 4.

V.—*Propriétés de la surface de Kummer elliptique d'indice trois.*

32. Nous réunirons ici, relativement à la surface de Kummer d'indice trois, quelques propositions qui sont des répétitions ou des conséquences des théorêmes démontrés plus haut.

Une surface de Kummer est une surface elliptique d'indice trois lorsque les six points doubles situés sur une de ses seize coniques peuvent se répartir en deux groupes de trois points, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au

triangle formé par les points du premier groupe et circonscrite au triangle formé par les points du second.

La même propriété appartient aux quinze autres coniques de la surface.

On peut tracer sur la surface deux séries, simplement infinie chacune, de sextiques gauches de genre un; une sextique quelconque de la première série et une sextique quelconque de la seconde sont sur une surface du troisième ordre et se coupent en dix-huit points.

Chacune des sextiques a trois sécantes quadruples: les sécantes quadruples des sextiques d'une série forment l'ensemble des génératrices rectilignes d'un même système d'une quadrique; les sécantes quadruples des sextiques de l'autre série forment l'ensemble des génératrices de l'autre système, sur la même quadrique.

Cette quadrique est une des dix quadriques fondamentales de la surface de Kummer, c. à d. une des quadriques par rapport auxquelles la surface est sa propre polaire réciproque.

Les sextiques d'une série sont coupées par un plan tangent quelconque de la quadrique précédente en six points situées sur une conique: celles de ces coniques qui sont dans un même plan tangent de la quadrique ont quatre points communs, dont deux sont situés sur la surface de Kummer.

Réciproquement, tout plan qui coupe une sextique de l'une ou de l'autre série en six points situés sur une conique est tangent à la quadrique fondamentale.

Parmi les sextiques d'une série figurent quatre cubiques gauches; chacune de ces cubiques passe par quatre points doubles de la surface de Kummer, qui sont les sommets d'un tétraèdre dont les faces sont des plans singuliers de la surface.

Les seize points doubles se répartissent ainsi, par rapport aux quatre cubiques d'une même série, en quatre tétraèdres n'ayant deux à deux aucun sommet et aucune face communs.

Un quelconque des tétraèdres de la première série et un quelconque des tétraèdres de la seconde ont un sommet commun; la face opposée à ce sommet est la même dans les deux tétraèdres: ce sommet et cette face sont polaires réciproques par rapport à la quadrique fondamentale considérée plus haut.

Deux cubiques de séries différentes sont sur une quadrique qui coupe en outre la surface de Kummer suivant une conique; inversement par chaque conique de la surface passe une quadrique contenant deux cubiques gauches.

VI.—*Des courbes tracées sur les surfaces de Kummer elliptiques.*

33. Sur une surface de Kummer générale, pour laquelle les fonctions coordonnées $x_h(u, v)$ satisfont aux relations (1), on obtient toutes les courbes algébriques en égalant à zéro une fonction thêta formée avec les mêmes paires de périodes que les $x_h(u, v)$, c. à d. une fonction uniforme et entière vérifiant les relations:

$$\begin{aligned}\Theta(u + 2\pi i, v) &= \Theta(u, v + 2\pi i) = \Theta(u, v),\\ \Theta(u + a, v + b) &= \Theta(u, v)\, e^{-mu+\alpha},\\ \Theta(u + b, v + c) &= \Theta(u, v)\, e^{-mv+\beta},\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes quelconques, et m un entier positif qui est *l'ordre* de la fonction thêta.*

Il est bien clair que, sur une surface de Kummer elliptique, il existe des courbes correspondantes, et il n'y a rien à changer, à ce point de vue, à la théorie générale: mais en dehors de ces courbes, les surfaces elliptiques en possédent d'autres, qui leur sont spéciales (par exemple les courbes $u =$ const.) et qui n'existent pas sur les surfaces ordinaires de Kummer. C'est l'étude de ces courbes *spéciales* que nous allons aborder brièvement.

34. En vertu des équations fondamentales (5), les coordonnées non homogènes, $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ d'une point d'une surface de Kummer elliptique sont des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres u et v (aux périodes $2\pi i$ et na pour u, $2\pi i$ et nc pour v); il en résulte qu'on obtiendra l'équation de toute courbe algébrique de la surface en égalant à zéro une fonction doublement périodique séparément par rapport à u, v — et réciproquement. Au lieu d'une fonction doublement périodique, on peut évidemment égaler à zéro une fonction de la forme:

$$\phi(u, v) = \alpha_1 f_1(u)\, g_1(v) + \alpha_2 f_2(u)\, g_2(v) + \dots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des constantes, $f_1(u), f_2(u), \dots$ des fonctions thêta elliptiques de u, $g_1(v), g_2(v), \dots$ des fonctions thêta elliptiques de v. Les périodes

---

* Journal de Math., tome IX, 4e série, p. 44 et 48.

sont $2\pi i$ et na pour u; $2\pi i$ et nc pour v, et les fonctions f et g satisfont à des relations de la forme:

$$f_i(u+2\pi i)=f_i(u), \qquad g_i(v+2\pi i)=g_i(v),$$
$$f_i(u+na)\ =f_i(u)\,e^{-hu+\gamma}, \qquad g_i(v+nc)\ =g_i(v)\,e^{-kv+\gamma'},$$

h et k désignent des entiers positifs, γ et δ des constantes quelconques.

La courbe $\phi(u,v)=0$ est, comme on l'a dit, une courbe algébrique de la surface de Kummer (5); sur cette surface, le point u, v est d'ailleurs le même que le point $u+a, v+\frac{2\pi i}{n}$, ou que le point $u+\frac{2\pi i}{n}, v+c$, en vertu des équations (5): il en résulte que la courbe $\phi\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right)=0$ est la même que la courbe $\phi(u,v)=0$, et que la courbe $\phi\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right)=0$. En d'autres termes, si la condition $\phi(u,v)=0$ n'entraîne pas les conditions $\phi\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right)=0$, $\phi\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right)=0$, l'équation de la courbe correspondante sur la surface de Kummer sera en réalité:

$$\phi(u,v)\phi\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right)\phi\left(u+2a, v+2\frac{2\pi i}{n}\right)\ldots\phi\left(u+(n-1)a,\ v+(n-1)\frac{2\pi i}{n}\right)$$
$$\times\phi\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right)\phi\left(u+2\frac{2\pi i}{n}, v+2c\right)\ldots\phi\left(u+n-1\frac{2\pi i}{n}, v+(n-1)c\right)=0.$$

Si la condition $\phi(u,v)=0$ entraînait $\phi\left(u+\rho a, v+\rho\,.\frac{2\pi i}{n}\right)=0$, on ne garderait dans la première ligne que les facteurs ϕ jusqu'à

$$\phi\left(u+(\rho-1)\,a, v+(\rho-1)\,\frac{2\pi i}{n}\right),$$

et une circonstance analogue peut se présenter pour la seconde ligne.

Ainsi, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer considérée s'obtiendra en annulant une fonction $\Phi(u,v)$, de la même forme que $\phi(u,v)$, c. à d. une fonction thêta elliptique, aux périodes $2\pi i$ et na de la variable u et aux périodes $2\pi i$ et nc de la variable v, et se reproduisant à *un facteur près* lorsqu'on change u, v en $u+a, v+\frac{2\pi i}{n}$ ou en $u+\frac{2\pi i}{n}, v+c$. Les facteurs qui interviennent dans ces relations sont nécessairement, comme on

le voit sans difficulté, des exponentielles de la form $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, λ et μ étant des constantes.

On a donc:

$$\Phi(u+2\pi i, v) = \Phi(u, v+2\pi i) = \Phi(u, v),$$

$$\text{(a)} \quad \Phi\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right) = \Phi(u, v)\, e^{\lambda u+\mu v+\nu},$$

$$\text{(c)} \quad \Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right) = \Phi(u, v)\, e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'},$$

$$\Phi(u+na, v) = \Phi(u, v)\, e^{-hu+\gamma},$$

$$\Phi(u, v+nc) = \Phi(u, v)\, e^{-kv+\gamma'}.$$

De la comparaison de ces équations on déduit immédiatement:

$$\mu = 0;\ \lambda' = 0;\ n\lambda = -h;\ n\mu' = -k;$$

de plus $2\pi i$ étant une période de u, il est clair que λ et μ' sont entiers, et les relations précédentes montrent que ces entiers sont négatifs. Enfin si l'on opère successivement les transformations (a) et (c), on obtient l'équation de condition:

$$2\pi i(\lambda-\mu') = 2n\rho\pi i, \text{ ou } \lambda-\mu' = n\rho,$$

ρ étant un entier.

35. On a donc définitivement, en remplaçant λ par $-p$:

$$\Phi(u+2\pi i, v) = \Phi(u, v+2\pi i) = \Phi(u, v),$$

$$\Phi\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right) = \Phi(u, v)\, e^{-pu+\nu},$$

$$\Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right) = \Phi(u, v)\, e^{-(p+n\rho)v+\nu'},$$

p étant un entier positif, et ρ un entier, positif ou négatif, tel cependant que $p+n\rho$ soit positif.

Supposons d'abord ρ positif; considérons une fonction thêta elliptique de la variable u, $f(u)$, aux périodes $\frac{2\pi i}{n}$ et a, vérifiant les relations:

$$f\left(u+\frac{2\pi i}{n}\right) = f(u),$$

$$f(u+a) = f(u)\, e^{-n\rho v+\delta},$$

où δ est une constante arbitraire: une telle fonction existe toujours. Il résulte de ces relations et des précédentes que la fonction $\Phi(u, v) f(u)$ est une fonction thêta hyperelliptique des deux variables u, v, et d'ordre $p+n\rho$ (n° 33).

Si ρ était négatif, on formerait de même une fonction thêta elliptique de v, $g(v)$, telle que le produit $\Phi(u, v)\, g(v)$ fût une fonction thêta hyperelliptique de u, v et d'ordre p.

Or sur la surface de Kummer, la courbe $f(u) = 0$ se décompose en un certain nombre de courbes $u =$ const. ; de même la courbe $g(v) = 0$ se décompose en courbes de la série $v =$ const. ; donc :

Toute courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique devient une courbe ordinaire si on lui adjoint un certain nombre de courbes d'une des séries $u =$ const. ou $v =$ const.

Nous avons établi dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques que la surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une surface de Kummer générale coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques ; il en résulte aisément que :

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques et suivant une ou plusieurs courbes appartenant toutes soit à la série $u =$ const., soit à la série $v =$ const.

Ce théorême est tout à fait analogue à cette proposition d'Halphen sur les quadriques :

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une quadrique ne coupe en outre cette surface que suivant des génératrices d'un même système.